Ηλεκτρονικοι Υπολογιστες Ι

Ασκήσεις Εργαστηρίου 12

1. Το αρχείο περιέχει 3590 ακέραιους με το πολύ 7 ψηφία, σε ξεχωριστή γραμμή ο καθένας. Αποθηκεύστε το στον υπολογιστή σας. Βρείτε τους αριθμούς σε αυτό που έχουν άθροισμα ψηφίων ίσο με 27. Γράψτε τους στο αρχείο *s27.txt*, ένα αριθμό σε κάθε σειρά, και τυπώστε στην οθόνη το πλήθος τους.

2. Ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός K μικρότερος του 1024 ($= 2^{10}$) μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα δυνάμεων του 2:

   $$K = d_9 2^9 + d_8 2^8 + \cdots d_1 2^1 + d_0 2^0 \ .$$

   Οι συντελεστές d_9, d_8,..., d_1, d_0 αποτελούν τα ψηφία της αναπαράστασης του K στο δυαδικό σύστημα.

   Γράψτε υποπρόγραμμα που να δέχεται ως πρώτο όρισμα ένα ακέραιο και ως δεύτερο ένα διάνυσμα 10 θέσεων. Το υποπρόγραμμα θα υπολογίζει τα δυαδικά ψηφία d_0, ..., d_9 για τον ακέραιο και θα τα αποθηκεύει στο διάνυσμα. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε το για να βρείτε και να τυπώσετε στην οθόνη τα δυαδικά ψηφία των αριθμών 81, 833, 173.

   Υπόδειξη: Αν το K είναι ακέραιος γραμμένος στη δυαδική αναπαράσταση, πόσο κάνει `MOD(K,2)`; Πόσο κάνει `K/2`;

3. Στη Μαθηματική Φυσική εμφανίζεται η οικογένεια πολυωνύμων Bessel, $y_n(x)$. Η τάξη n του πολυωνύμου είναι ακέραια, $0, 1, \ldots$. Τα πρώτα πολυώνυμα Bessel είναι

   $$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 \\ y_1(x) &= x + 1 \\ y_2(x) &= 3x^2 + 3x + 1 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

   Για τα πολυώνυμα Bessel ισχύουν οι εξής σχέσεις:

   $$\begin{aligned} y_n(x) &= (2n-1)xy_{n-1}(x) + y_{n-2}(x) \qquad n \geq 2 \ , \\ x^2 y_n'(x) &= (nx-1)y_n(x) + y_{n-1}(x) \qquad n \geq 1 \ , \\ y_0'(x) &= 0 \ . \end{aligned}$$

   Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις,

   (α΄) γράψτε συνάρτηση που να υπολογίζει την τιμή ενός πολυωνύμου Bessel. Αυτή θα δέχεται ως ορίσματα έναν ακέραιο αριθμό n, που θα αντιπροσωπεύει την τάξη του πολυωνύμου, και ένα πραγματικό x που θα είναι το σημείο υπολογισμού. Θα επιστρέφει την τιμή του $y_n(x)$. Χρησιμοποιήστε τη για να υπολογίσετε τα $y_3(1.2)$, $y_6(4.1)$.

(β′) γράψτε συνάρτηση που να υπολογίζει την πρώτη παράγωγο του $y_n(x)$ (για $x \neq 0$). Χρησιμοποιήστε τη για να υπολογίσετε τα $y'_3(1.2)$, $y'_6(4.1)$.

4. Η μαθηματική συνάρτηση $\Gamma(z)$ μπορεί να οριστεί από την έκφραση

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{n+z} \ .$$

Γράψτε συνάρτηση που να υπολογίζει την $\Gamma(z)$. Χρησιμοποιήστε τη για να δείξετε ότι

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi \ .$$

Υπόδειξη I: υπολογίστε τα δύο μέλη της εξίσωσης· θα πρέπει να διαφέρουν ελάχιστα.

Υπόδειξη II: Στο γινόμενο δεν μπορούμε, φυσικά, να πάρουμε άπειρους όρους. Να σταματήσετε τον υπολογισμό του στον πρώτο όρο που διαφέρει από το 1 κατ' απόλυτη τιμή λιγότερο 10^{-12}.

5. Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση που είναι μη αρνητική στο διάστημα $[a, b]$. Ένας τρόπος για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ ,$$

δηλαδή, το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της $f(x)$ μέχρι τον άξονα x, είναι ο εξής: επιλέγουμε ένα μεγάλο αριθμό από τυχαία σημεία (x_i, y_i) (δηλαδή τυχαία x_i και y_i), ομοιόμορφα κατανεμημένα στο παραλληλόγραμμο που αποτελείται από τα σημεία (x, y) με $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq \max\{f(x)\}$. Το $\max\{f(x)\}$ είναι η μέγιστη τιμή της $f(x)$ στο $[a, b]$. Μετρούμε όσα σημεία είναι κάτω από την καμπύλη $y = f(x)$ ή ακριβώς πάνω σε αυτή (δηλαδή αυτά για τα οποία ισχύει $y_i \leq f(x_i)$). Το πλήθος αυτών προς το συνολικό αριθμό των σημείων είναι προσεγγιστικά ο λόγος του συγκεκριμένου ολοκληρώματος προς το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου.

(α′) Χρησιμοποιήστε την υπορουτίνα `RANDOM_NUMBER()` για την παραγωγή τυχαίων αριθμών. Αυτή δέχεται μια πραγματική μεταβλητή (ή πραγματικό διάνυσμα) που μετά την κλήση έχει αποκτήσει τυχαία τιμή (ή τυχαίες τιμές) στο διάστημα $[0, 1)$. Αγνοήστε το γεγονός ότι δεν μπορεί να προκύψει ως τυχαία τιμή το 1.

(β′) Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα υπολογίζει με τον παραπάνω τρόπο το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \ ,$$

με $f(x) = 3(1 + 2x - 3x^2)/4$.

Υπόδειξη: Η μέγιστη τιμή της συγκεκριμένης $f(x)$ στο $[0, 1]$ είναι 1.