Ηλεκτρονικοι Υπολογιστες Ι

Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2009 (Α΄)

1. Ανάστροφος ενός πίνακα A είναι ο πίνακας A^T για τα στοιχεία του οποίου ισχύει
$$A^T_{ij} = A_{ji} \ .$$
Ένας πίνακας A με πραγματικά στοιχεία λέγεται ορθογώνιος όταν ο ανάστροφός του είναι και αντίστροφός του, δηλαδή ισχύει
$$AA^T = A^T A = I \ .$$
Να δείξετε με κατάλληλο πρόγραμμα ότι ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
είναι ορθογώνιος. Επομένως:

   - Γράψτε υποπρόγραμμα που να δέχεται ένα πίνακα πραγματικών και να επιστρέφει τον ανάστροφό του,
   - Γράψτε άλλο υποπρόγραμμα που να δέχεται δύο πίνακες και να υπολογίζει το γινόμενό τους.

     Υπενθύμιση: Γινόμενο δύο πινάκων A, B είναι ο πίνακας C για τα στοιχεία του οποίου ισχύει
     $$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} \ .$$
   - Χρησιμοποιήστε τα προηγούμενα υποπρογράμματα για να υπολογίσετε τα γινόμενα AA^T, $A^T A$ για τον πίνακα που σας δόθηκε. Να τυπώσετε στην οθόνη τους δύο πίνακες που προκύπτουν (και οι δύο θα πρέπει να είναι ο μοναδιαίος). Τα στοιχεία τους να τυπωθούν με 5 δεκαδικά ψηφία.

   Παρατήρηση: Να μη χρησιμοποιήσετε ενσωματωμένες συναρτήσεις για την αναστροφή και τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

2. Ο Μανώλης, ο επιστάτης, είναι υπεύθυνος για να ανάβει και να σβήνει τα φώτα σε ένα διάδρομο ενός κτηρίου. Έστω ότι ο διάδρομος έχει n λαμπτήρες στη σειρά. Καθένας έχει ένα χαρακτηριστικό αριθμό: $1, 2, 3, \ldots, n$.

   Κάθε λαμπτήρας έχει το δικό του διακόπτη. Το είδος του διακόπτη είναι τέτοιο ώστε πατώντας τον ανάβει ο λαμπτήρας (αν είναι σβηστός) ή σβήνει (αν είναι αναμμένος). Ο Μανώλης κάνει n διαδρομές πήγαινε-έλα (όσοι οι λαμπτήρες στο διάδρομο). Στην διαδρομή i διασχίζει το διάδρομο και πατάει τους διακόπτες κάθε λαμπτήρα που ο χαρακτηριστικός αριθμός του είναι πολλαπλάσιος του i. Στην επιστροφή κάθε διαδρομής δεν πατά κανένα διακόπτη.

   - Πόσοι είναι οι αναμμένοι λαμπτήρες μετά τη δαδρομή n, αν υποθέσουμε ότι αρχικά ήταν όλοι σβηστοί;
   - Υποθέστε ότι οι λαμπτήρες ισαπέχουν και η απόσταση μεταξύ διαδοχικών λαμπτήρων είναι $1\mathrm{m}$. Συγκεντρώστε σε ένα πίνακα τους αριθμούς των αναμμένων λαμπτήρων μόνο. Σε αυτόν, οι διαφορές των διαδοχικών στοιχείων είναι οι αποστάσεις διαδοχικών αναμμένων λαμπτήρων. Ποια είναι η μικρότερη και ποια η μεγαλύτερη απόσταση αναμμένων λαμπτήρων;

3. Να κατασκευάσετε πρόγραμμα για τον υπολογισμό της παρακάτω παράστασης:

$$Y = \frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n+1)^3}{2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2}$$

   όπου n είναι θετικός ακέραιος, ο οποίος δίνεται ως είσοδο στο πρόγραμμα. Αν το n δεν ικανοποιεί τον προηγούμενο περιορισμό να μην γίνεται ο υπολογισμός αλλά να εμφανίζεται κατάλληλο μήνυμα.

Διάρκεια: 3 ώρες **Καλή επιτυχία!**