Ηλεκτρονικοι Υπολογιστες Ι

Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2013 (Β΄)

1. Από τα μαθηματικά γνωρίζουμε ότι 2/10

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) .$$

Να επαληθεύσετε αριθμητικά την παραπάνω σχέση για $x=\sqrt{5}$.

Υπόδειξη: Σε κανένα γινόμενο δεν μπορούμε, φυσικά, να πάρουμε άπειρους όρους. Παρατηρείστε ότι στα συγκεκριμένα γινόμενα, οι όροι τείνουν στο 1 όταν το $n \to \infty$. Να σταματήσετε τον υπολογισμό κάθε γινομένου στον πρώτο όρο που η διαφορά του από το 1 είναι κατ΄ απόλυτη τιμή μικρότερη από 10^{-8}.

2. Γράψτε πρόγραμμα που να υπολογίζει τους διαιρέτες όλων των θετικών ακέραιων αριθμών μέχρι το 100000. Να τους τυπώνει σε διαδοχικές γραμμές στο αρχείο “divisors.dat” ως εξής: η k γραμμή του αρχείου θα περιέχει τους ακέραιους αριθμούς που διαιρούν ακριβώς τον αριθμό k, με ένα κενό ανάμεσά τους. 3/10

3. Η κυβική ρίζα ενός πραγματικού αριθμού a μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά ως εξής: Επιλέγουμε μία οποιαδήποτε μη μηδενική τιμή, x_0. Έστω $x_0 = 1$. Εφαρμόζουμε τον τύπο 5/10

$$x_{i+1}=x_i\frac{x_i^3+2a}{2x_i^3+\ \ a}$$

για να παράγουμε διαδοχικά τις τιμές $x_1, x_2, \ldots$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0\frac{x_0^3+2a}{2x_0^3+\ \ a}\ , \\ x_2 &= x_1\frac{x_1^3+2a}{2x_1^3+\ \ a}\ , \quad \text{κλπ.} \end{aligned}$$

Κάθε τιμή από τις $x_1, x_2, \ldots$ προσεγγίζει όλο και καλύτερα το $\sqrt[3]{a}$. Μπορούμε να σταματήσουμε σε κάποια τιμή x_k που ικανοποιεί τη σχέση $|x_k^3 - a| \leq \varepsilon$, όπου ε μία αρκετά μικρή τιμή, π.χ. 10^{-12}.

Γράψτε υποπρόγραμμα που να δέχεται ως όρισμα ένα πραγματικό αριθμό και να επιστρέφει την προσεγγιστική τιμή για την κυβική ρίζα του. Χρησιμοποιήστε το για να υπολογίσετε τις κυβικές ρίζες των αριθμών 20.0, 20.1, 20.2,. . . ,30.0. Να τυπώσετε σε αρχείο με όνομα “cbrt” δύο στήλες αριθμών: η πρώτη θα αποτελείται από τους αριθμούς 20.0, 20.1, 20.2,. . . ,30.0 και η δεύτερη από τις κυβικές ρίζες τους.

Διάρκεια: 3 ώρες **Καλή επιτυχία!**