Ηλεκτρονικοι Υπολογιστες Ι

Θέματα Εξετάσεων Ιανουαρίου 2016 (Γ΄)

1. Η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, μηδενικής τάξης, $J_0(x)$, δίνεται από τον τύπο
$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} .$$

   (α΄) Γράψτε υποπρόγραμμα που να υπολογίζει την παραπάνω συνάρτηση για δεδομένο x.

   Υπόδειξη Ι: Σε κανένα άθροισμα δεν μπορούμε, φυσικά, να πάρουμε άπειρους όρους. Να σταματήσετε τον υπολογισμό του στον πρώτο όρο που κατ΄ απόλυτη τιμή είναι μικρότερος από 10^{-12}.

   Υπόδειξη ΙΙ: Προσέξτε αν ο κάθε όρος στο άθροισμα που έχετε να υπολογίσετε μπορεί να προκύψει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό κατάλληλης ποσότητας.

   (β΄) Να γράψετε πρόγραμμα που να τυπώνει στο αρχείο "bessj0.dat" την τιμή του $J_0(x)$ σε 80 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[0, 13]$ (στα 80 σημεία να περιλαμβάνονται και τα άκρα του διαστήματος). Το αρχείο θα έχει σε δύο στήλες με ένα κενό ανάμεσά τους τις τιμές του x και του αντίστοιχου $J_0(x)$ με 4 δεκαδικά ψηφία.

   Παρατήρηση: αν δεν έχετε γράψει το υποπρόγραμμα στο προηγούμενο ερώτημα, χρησιμοποιήστε την ενσωματωμένη συνάρτηση bessel_j0(x).

2. Στη Μαθηματική Φυσική χρησιμοποιείται η οικογένεια πολυωνύμων Legendre, $P_n(x)$. Η τάξη n του πολυωνύμου είναι ακέραια, $0, 1, \ldots$. Το σημείο υπολογισμού x πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $|x| \leq 1$. Τα πρώτα πολυώνυμα Legendre είναι

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= (3x^2 - 1)/2 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Για τα πολυώνυμα Legendre ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} nP_n(x) &= (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x) , \qquad n \geq 2 , \\ (1-x^2)P_n'(x) &= -nxP_n(x) + nP_{n-1}(x) , \qquad n \geq 1 , \\ P_0'(x) &= 0 . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις,

(α΄) γράψτε υποπρόγραμμα που να υπολογίζει την τιμή ενός πολυωνύμου Legendre. Αυτό θα δέχεται ως ορίσματα έναν ακέραιο αριθμό n, που θα αντιπροσωπεύει την τάξη του πολυωνύμου, και ένα πραγματικό x που θα είναι το σημείο υπολογισμού. Θα ελέγχει ότι ισχύει $|x| \leq 1$ και θα επιστρέφει την τιμή του $P_n(x)$.

(β΄) γράψτε υποπρόγραμμα που να υπολογίζει την πρώτη παράγωγο του $P_n(x)$ (για $|x| < 1$).

3. Ο ανάστροφος ενός θετικού ακέραιου είναι ένας άλλος αριθμός με τα ίδια ψηφία σε ανάστροφη σειρά. Π.χ. ο ανάστροφος του 529 είναι ο 925, ο ανάστροφος του 910 είναι ο 19.

   Κάποιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί έχουν την εξής ιδιότητα: το άθροισμα του αριθμού και του ανάστροφού του είναι αριθμός που τα ψηφία του είναι περιττοί αριθμοί. Π.χ. $409 + 904 = 1313$. Ας ονομάσουμε τους αριθμούς με αυτή την ιδιότητα *αναστρέψιμους*.

   Γράψτε κώδικα που να τυπώνει στο αρχείο “reversible.dat” όλους τους αναστρέψιμους αριθμούς μέχρι το 10000. Στην οθόνη να τυπώνει το πλήθος τους.

   Υπόδειξη: Θα χρειαστείτε ένα υποπρόγραμμα που θα υπολογίζει το πλήθος των ψηφίων ενός ακέραιου αριθμού και ένα άλλο υποπρόγραμμα που θα αναλύει τον αριθμό στα ψηφία του.

Να στείλετε τους κώδικες που θα γράψετε, ως συνημμένους σε email στο `ety114@edu.materials.uoc.gr`.

Διάρκεια: 2 ώρες — **Καλή επιτυχία!**