Αριθμητική Ανάλυση

Ασκήσεις Εργαστηρίου 9

1. (α΄) Υλοποιήστε τον αλγόριθμο τραπεζίου σε υποπρόγραμμα. Αυτό θα δέχεται ως ορίσματα τουλάχιστον τα όρια της ολοκλήρωσης και το πλήθος των διαστημάτων. Θα επιστρέφει την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος.

   (β΄) Χρησιμοποιήστε το υποπρόγραμμα για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

   $$\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$$

   διαδοχικά με $N = 2, 4, 8, 16, \ldots, 512$ διαστήματα. Το πρόγραμμά σας να τυπώνει για κάθε N την υπολογιζόμενη τιμή και την απόλυτη διαφορά της από την ακριβή τιμή.

2. (α΄) Υλοποιήστε τον αλγόριθμο Simpson σε υποπρόγραμμα. Αυτό θα δέχεται ως ορίσματα τουλάχιστον τα όρια της ολοκλήρωσης και το πλήθος των διαστημάτων. Θα επιστρέφει την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος.

   (β΄) Χρησιμοποιήστε το για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

   $$\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$$

   με όσα διαστήματα χρειάζεται ώστε να έχετε ακρίβεια τουλάχιστον 6 ψηφίων.

   Υπόδειξη: Επιλέξτε κατάλληλα το βήμα (άρα και το πλήθος των διαστημάτων) ώστε το σφάλμα

   $$|E| \leq \frac{b-a}{180} M h^4 \ .$$

   του σύνθετου τύπου Simpson να είναι μικρότερο από 10^{-6}.

3. Υλοποιήστε ένα υποπρόγραμμα που να υπολογίζει ολοκληρώματα ανεξάρτητα με το πλήθος των σημείων στα οποία είναι γνωστή η ολοκληρωτέα συνάρτηση. Αν το πλήθος των διαστημάτων είναι περιττό (και μεγαλύτερο του 3), να χρησιμοποιεί τον τύπο 3/8 Simpson για τα πρώτα 3 και για τα υπόλοιπα τον τύπο 1/3 Simpson. Αν είναι άρτιο, να χρησιμοποιεί μόνο τον 1/3 Simpson.

   Να το εφαρμόσετε για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης που δίνεται με τη μορφή σημείων x, y στο αρχείο. Η πρώτη γραμμή του αρχείου περιέχει το πλήθος των σημείων, τα οποία ακολουθούν. Τα σημεία ισαπέχουν.

   Υπόδειξη: Τα σημεία στο αρχείο προέκυψαν από τη συνάρτηση $\mathrm{e}^x \sin x$ στο $[0, 3]$. Υπολογίστε ακριβώς την τιμή του ολοκληρώματος για να μπορείτε να ελέγξετε το αποτέλεσμά σας.

4. **Παρέκταση Richardson για ολοκληρώματα (Μέθοδος Romberg)**. Μπορεί να δειχθεί ότι ο σύνθετος τύπος τραπεζίου για το ολοκλήρωμα,

$$I_0 = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x \ ,$$

δίνει για την ακριβή τιμή τη σχέση

$$I_0 = I_h + \alpha_2 h^2 + \alpha_4 h^4 + \cdots \ , \tag{1}$$

όπου

$$I_h = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right) \ ,$$

$h = (x_n - x_0)/n$ και α_i οι συντελεστές των όρων h^i του σφάλματος.

Γράψτε τη (1) για τρία διαφορετικά βήματα, π.χ. $h, h/2, h/4$. Παρατηρήστε ότι σχηματίζεται ένα σύστημα τριών γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα I_0, α_2, α_4. Βρείτε τη λύση του συστήματος ως προς I_0; ο τύπος στον οποίο θα καταλήξετε—γραμμικός συνδυασμός των $I_h, I_{h/2}, I_{h/4}$ που έχουν σφάλματα $O(h^2)$—δίνει την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος με σφάλμα $O(h^6)$.

[Λύση συστήματος: $I_0 = (I_h - 20I_{h/2} + 64I_{h/4})/45$.]

Υλοποιήστε σε κώδικα τον παραπάνω αλγόριθμο ολοκλήρωσης.

5. Υλοποιήστε σε κώδικα τη μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss–Legendre για 2 και για 3 σημεία. Εφαρμόστε τη για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{2.1}^{5.2} x^3 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \ .$$

[Ακριβής τιμή ολοκληρώματος: 3.60346...]

6. Τα πρώτα πολυώνυμα Hermite είναι τα

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \quad , \quad H_1(x) = 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \quad , \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad . \end{aligned}$$

Να γράψετε υποπρόγραμμα που να υλοποιεί τη μέθοδο Gauss–Hermite για $n = 4$. Χρησιμοποιήστε το για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} x^2\,\mathrm{d}x \ .$$

Συγκρίνετε με την ακριβή τιμή ($\sqrt{\pi}/2$).