Αριθμητικη Αναλυση

Ασκήσεις Εργαστηρίου 11

1. Υπολογίστε με τη μέθοδο Clenshaw–Curtis το ολοκλήρωμα

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

Πόσα σημεία χρειάζονται γα να προσεγγίσετε με 12 ψηφία την ακριβή τιμή $(2\tan^{-1}(2))$;

2. Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά από τύπο της μορφής

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} a_k f(x_k)\ , \tag{1}$$

όπου x_1,x_2,...,x_N διακριτά σημεία της επιλογής μας στο διάστημα $[-1, 1]$.

Έστω ότι επιλέγουμε να είναι το $N = 7$ και τα σημεία x_k τα -0.9, -0.7, -0.4, 0.1, 0.4, 0.8, 0.9. Προσδιορίστε τα a_k $(k = 1, \ldots, 7)$ ώστε ο τύπος (1) να είναι *ακριβής* για τις συναρτήσεις $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, ..., $f_6(x) = x^6$. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε τον για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} x^3 \sin(\pi x)\ \mathrm{d}x\ .$$

3. Γράψτε κώδικα που να υλοποιεί τον αλγόριθμο FFT. Θα σας διευκολύνει να χρησιμοποιήσετε αναδρομική συνάρτηση. Μπορείτε να τη γράψετε χωρίς να χρησιμοποιεί νέα διανύσματα;

Εφαρμόστε τον κώδικά σας για να υπολογίσετε το διακριτό μετασχηματισμό Fourier για τον πριονωτό παλμό: $f(x) = x - 0.5$ για $0 \le x \le 1$. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση επαναλαμβάνεται περιοδικά με μετατόπιση. Επιλέξτε 1024 ισαπέχοντα σημεία στο $[0, 1)$ (προσέξτε ότι δεν περιλαμβάνεται το δεξί άκρο) και υπολογίστε σε αυτά τη συνάρτηση.

Η ακριβής λύση είναι $C_0 = 0$, $C_m = \frac{\mathrm{i}}{2m\pi}$ με $m = \pm1, \pm2, \ldots$.

4. Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο FFT για να υπολογίσετε τους συντελεστές της μεθόδου ολοκλήρωσης Clenshaw–Curtis.