1 Ισαπέχοντα σημεία

$n+1$ ισαπέχοντα σημεία στο $[a,b]$:

$$x_i = a + ih$$

με $h = (b-a)/n$ και $i = 0, 1, \ldots, n$.

2 Πολυώνυμο παρεμβολής

Πολυώνυμο παρεμβολής στα σημεία (x_i, f_i) με $i = 0, 1, \ldots, n$:

2.1 με τύπο Lagrange

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \, \ell_i(x) \; .$$

όπου

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \; , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \; ,$$

2.2 με τύπο Newton

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i q_i(x) \; ,$$

όπου

$$q_i(x) = \begin{cases} 1 \; , & i = 0 \; , \\ \displaystyle\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) = (x - x_{i-1}) q_{i-1}(x) \; , & i = 1, 2, \ldots, n \; . \end{cases}$$

Οι συντελεστές: $a_0 = f_0$ και

$$a_j = \frac{1}{q_j(x_j)} \left(f_j - \sum_{i=0}^{j-1} a_i q_i(x_j) \right) \; , \qquad j = 1, 2, \ldots, n \; .$$

2.3 με ανάπτυγμα σε μονώνυμα

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \; ,$$

όπου οι συντελεστές a_i είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \; .$$

Χρησιμοποιούμε απαλοιφή Gauss.

3 Λόγος πολυωνύμων

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

όπου

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{M} a_k x^k, \qquad Q(x) = 1 + \sum_{k=1}^{N} b_k x^k \ .$$

Έχουμε $M + N + 1$ άγνωστους, τους συντελεστές a_i $(i = 0, \ldots, n)$ και b_i $(i = 1, \ldots, n)$. Για $i = 1, \ldots, M + N + 1$

$$P(x_i) = f_i Q(x_i) \Rightarrow a_0 + \sum_{k=1}^{M} a_k x_i^k - \sum_{k=1}^{N} b_k f_i x_i^k = f_i \ .$$

4 Φυσική κυβική spline

Η spline είναι η κλαδική συνάρτηση

$$\text{spline}(x) = \begin{cases} p_0(x) \ , & \text{αν } x \in [x_0, x_1] \\ p_1(x) \ , & \text{αν } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}(x) \ , & \text{αν } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

όπου

$$p_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + f_i \ ,$$

και a_i, b_i, c_i οι λύσεις του $3n \times 3n$ συστήματος:

$$\begin{aligned} a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \ , \ \text{για } i = 0, \ldots, n-1 \ , \\ 3a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + 2b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i - c_{i+1} &= 0 \ , \ \text{για } i = 0, \ldots, n-2 \ , \\ 3a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i - b_{i+1} &= 0 \ , \ \text{για } i = 0, \ldots, n-2 \ , \\ b_0 &= 0 \ , \\ 3a_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + b_{n-1} &= 0 \ . \end{aligned}$$