Υπολογισμός ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

1 Τύποι Newton–Cotes

Επιλέγουμε $n+1$ ισαπέχοντα σημεία $x_i = a + ih$ με $i = 0, 1, \ldots, n$ και $h = (b-a)/n$.

1.1 Σύνθετος Τύπος Τραπεζίου

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\right) + \mathcal{O}(\langle^{\in})\ ,$$

όπου $f_i \equiv f(x_i)$.

1.2 Σύνθετος Τύπος Simpson

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{j=1}^{n/2} f_{2j-1} + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f_{2j} + f_n\right) + \mathcal{O}(h^4)\ ,$$

όπου $f_i \equiv f(x_i)$.

1.3 Απλός τύπος Simpson 3/8

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right) + \mathcal{O}(h^5)\ ,$$

όπου $f_i \equiv f(x_i)$.

1.4 Μέθοδος Romberg

Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}
I_0 &= I_h + \alpha_2 h^2 + \alpha_4 h^4\ ,\\
I_0 &= I_{h/2} + \alpha_2 (h/2)^2 + \alpha_4 (h/2)^4\ ,\\
I_0 &= I_{h/4} + \alpha_2 (h/4)^2 + \alpha_4 (h/4)^4\ .
\end{aligned}$$

Η λύση για το I_0 έχει σφάλμα $\mathcal{O}(h^6)$.

2 Μέθοδοι Gauss

2.1 Gauss–Legendre

Με 1 σημείο:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 2f(0)\ .$$

Με 2 σημεία:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ .$$

Με 3 σημεία:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{0.6}\right) + \frac{8}{9} f\left(0\right) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{0.6}\right)\ .$$

2.2 Gauss–Hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{m} w_i f(x_i)\ ,$$

όπου x_i είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Hermite τάξης m, $H_m(x)$, και w_i τα αντίστοιχα βάρη, τα οποία είναι τα

$$w_i = \frac{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}{[H'_m(x_i)]^2}\ .$$