1 Μέθοδος Clenshaw–Curtis

Υπολογισμός ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Επιλέγουμε τα $n+1$ σημεία

$$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)\ , \quad i = 0,\ldots,n\ .$$

Στον τύπο

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)\ ,$$

οι συντελεστές w_i για τη μέθοδο Clenshaw–Curtis υπολογίζονται:

1.1 Με άθροισμα

$$w_i = \frac{c_i}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{b_j}{1-4j^2}\cos\left(\frac{2ij\pi}{n}\right)\ , \quad i=0,\ldots,n\ ,$$

όπου $\lfloor x\rfloor$ το ακέραιο μέρος του x και

$$b_j = \begin{cases} 1\ , & j=0 \\ 2\ , & 0<j<n/2 \\ 1\ , & j=n/2 \end{cases}\ , \qquad c_i = \begin{cases} 1\ , & i=0 \\ 2\ , & 0<i<n \\ 1\ , & i=n \end{cases}\ .$$

1.2 Με FFT

Ορίζουμε το διάνυσμα v, n θέσεων, ως εξής:

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{2}{1-4k^2} - \frac{1}{n^2-1+(n \bmod 2)}\ ,\ \text{για}\ k=0,\ldots,\lfloor n/2\rfloor-1 \\ v_{\lfloor n/2\rfloor} &= \frac{n-3}{2\lfloor n/2\rfloor-1} - 1 + \frac{1}{n^2-1+(n \bmod 2)}((2-(n \bmod 2))n-1) \\ v_{n-k} &= v_k\ ,\ \text{για}\ k=1,\ldots,\lfloor (n-1)/2\rfloor\ . \end{aligned}$$

Οι συντελεστές w_i, με $i=0,\ldots,n-1$, προκύπτουν από το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) του διανύσματος v και συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό τους ο αλγόριθμος FFT. Εύκολα φαίνεται επίσης ότι $w_n = w_0$.

2 Υπολογισμός ολοκληρώματος σε μη ισαπέχοντα σημεία

Από την

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f_i\ ,$$

έχουμε

$$\int_a^b x^k \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^k \quad \text{για } k = 0, \ldots, n-1 \,.$$

Δηλαδή τα w_i είναι λύσεις του γραμμικού συστήματος

$$\begin{bmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \frac{b^3-a^3}{3} \\ \vdots \\ \frac{b^n-a^n}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} \,.$$

3 FFT

Ο DFT του $\{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ με n δύναμη του 2 είναι

$$\bar{C}_m = \frac{1}{2}\left(\bar{C}_m^e + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m\pi/n}\bar{C}_m^o\right) \,,$$

για $m = 0, 1, \ldots, n-1$ ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \bar{C}_m &= \frac{1}{2}\left(\bar{C}_m^e + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m\pi/n}\bar{C}_m^o\right) \,, \\ \bar{C}_{m+n/2} &= \frac{1}{2}\left(\bar{C}_m^e - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m\pi/n}\bar{C}_m^o\right) \,, \end{aligned}$$

για $m = 0, 1, \ldots, n/2-1$.

Οι $\bar{C}_m^e$, $\bar{C}_m$ είναι οι DFT των $\{f_0, f_2, \ldots, f_{n-2}\}$ και $\{f_1, f_3, \ldots, f_{n-1}\}$ αντίστοιχα.

Για $n = 1$, $\bar{C}_0 = f_0$.