Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση

Σταμάτης Σταματιάδης
stamatis@materials.uoc.gr

Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών,
Πανεπιστήμιο Κρήτης

ΕΚΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων (1)

Θέλουμε να βρούμε τις τιμές των x_1, x_2, ..., x_n που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\,, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\,, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0\,. \end{aligned}$$

Οι μεταβλητές x_i και οι συναρτήσεις f_i είναι γενικά μιγαδικές.

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων (1)

Θέλουμε να βρούμε τις τιμές των x_1, x_2, ..., x_n που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \,, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \,, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \,. \end{aligned}$$

Οι μεταβλητές x_i και οι συναρτήσεις f_i είναι γενικά μιγαδικές.

Η ειδική περίπτωση

$$g(x, y) = 0 \,, \qquad h(x, y) = 0 \,,$$

με τις μεταβλητές και τις συναρτήσεις αποκλειστικά πραγματικές, μπορεί να λυθεί ως εξής:

- Ορίζουμε τη μιγαδική μεταβλητή $z = x + iy$ και τη μιγαδική συνάρτηση $f(z) = g(x, y) + ih(x, y)$.
- Το πρόβλημα τότε ανάγεται στο $f(z) = 0$.

Ανάπτυγμα Taylor για συνάρτηση πολλών μεταβλητών

Αν η συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, και
- γνωρίζουμε τις τιμές της f και των παραγώγων της σε ένα σημείο $\vec{a} \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n)$,

μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της σε άλλο σημείο $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} (x_i - a_i) \\
&+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \cdots .
\end{aligned}
$$

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων (3)

Αν υποθέσουμε ότι τα $\vec{x}$ και $\vec{a}$ απέχουν «λίγο», μπορούμε να παραλείψουμε τους όρους δεύτερης τάξης και πάνω.
Αντικαθιστούμε κάθε εξίσωση του μη γραμμικού συστήματος με το ανάπτυγμα Taylor για αυτή:

$$
\begin{aligned}
f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} (x_i - a_i) &\approx 0\,, \\
f_2(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} (x_i - a_i) &\approx 0\,, \\
&\vdots \quad \vdots \\
f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} (x_i - a_i) &\approx 0\,.
\end{aligned}
$$

Το $\vec{x}$ είναι η (άγνωστη) λύση του μη γραμμικού συστήματος και το $\vec{a}$ ένα γειτονικό σημείο σε αυτό.

Ορίζουμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

με όλες τις παραγώγους να υπολογίζονται στο $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, και το διάνυσμα

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{a}) \\ f_2(\vec{a}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{a}) \end{bmatrix}.$$

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων (5)

Το προσεγγιστικό σύστημα γίνεται

$$\vec{b} \approx -A \cdot (\vec{x} - \vec{a}) \Rightarrow \vec{x} \approx \vec{a} - A^{-1} \cdot \vec{b} \,.$$

Η τελευταία σχέση είναι αυτή που επαναληπτικά μπορεί να μας υπολογίσει το $\vec{x}$: αν θέσουμε στο $\vec{a}$ την k-οστή προσέγγιση της ρίζας, $\vec{x}^{(k)}$, με $k = 0, 1, \ldots$, η επόμενη, πιθανόν καλύτερη, προσέγγιση $\vec{x}^{(k+1)}$ είναι

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - A^{-1} \cdot \vec{b} \,.$$

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων (6)

Η επαναληπτική διαδικασία διακόπτεται όταν

- Οι απόλυτες τιμές των συναρτήσεων f_i (τα στοιχεία δηλαδή του $\vec{b}$) να είναι «μικρές»: $\left| f_i(\vec{x}^{(k)}) \right| < \varepsilon_i \,, \quad \forall i.$
- Το μέτρο του $\vec{b}^{(k)}$ να είναι «μικρό».
- Η απόλυτη βελτίωση στα x_i να είναι «μικρή» κατά μέτρο: $\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon_i.$
- Η σχετική βελτίωση στα x_i να είναι «μικρή» κατά μέτρο: $\left| \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| < \varepsilon_i$ αν $x_i^{(k)} \neq 0.$

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων (6)

Η επαναληπτική διαδικασία διακόπτεται όταν

- Οι απόλυτες τιμές των συναρτήσεων f_i (τα στοιχεία δηλαδή του $\vec{b}$) να είναι «μικρές»: $\left|f_i(\vec{x}^{(k)})\right| < \varepsilon_i \,, \quad \forall i$.
- Το μέτρο του $\vec{b}^{(k)}$ να είναι «μικρό».
- Η απόλυτη βελτίωση στα x_i να είναι «μικρή» κατά μέτρο: $\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| < \varepsilon_i$.
- Η σχετική βελτίωση στα x_i να είναι «μικρή» κατά μέτρο: $\left|\frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}}\right| < \varepsilon_i$ αν $x_i^{(k)} \neq 0$.

Η μέθοδος που παρουσιάστηκε είναι η μέθοδος Newton–Raphson για σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων.

Μέθοδος Newton–Raphson για μη γραμμικά συστήματα

1. Επιλέγουμε μια αρχική προσέγγιση της ρίζας, $\vec{x}^{(0)}$, *κοντά στην (άγνωστη) λύση*.
2. Ελέγχουμε με ένα ή περισσότερα κριτήρια αν η τρέχουσα προσέγγιση είναι αποδεκτή ως λύση. Αν όχι, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.
3. Υπολογίζουμε στην τρέχουσα προσέγγιση $\vec{x}^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ τον πίνακα A και το διάνυσμα $\vec{b}$.
4. *Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος*, επιλύουμε το γραμμικό σύστημα $A \cdot \vec{y} = \vec{b}$ ως προς $\vec{y}$. Η νέα προσέγγιση είναι $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{y}$.
5. Επαναλαμβάνουμε από το βήμα 2.