Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση

Σταμάτης Σταματιάδης
stamatis@materials.uoc.gr

Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών,
Πανεπιστήμιο Κρήτης

ΟΓΔΟΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

Μαθηματικό Πρόβλημα

Για μια άγνωστη συνάρτηση $f(x)$ ξέρουμε τις τιμές της, $\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots$, στα σημεία $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$. Τα σημεία x_i έχουν αύξουσα σειρά. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε παράγωγο κάποιας τάξης της $f(x)$ σε σημείο $\bar{x}$ στο διάστημα στο οποίο γνωρίζουμε την $f(x)$.

Μαθηματικό Πρόβλημα

Για μια άγνωστη συνάρτηση $f(x)$ ξέρουμε τις τιμές της, $\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots$, στα σημεία $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$. Τα σημεία x_i έχουν αύξουσα σειρά. Επιθυμούμε να υπολογίσουμε παράγωγο κάποιας τάξης της $f(x)$ σε σημείο $\bar{x}$ στο διάστημα στο οποίο γνωρίζουμε την $f(x)$.

Λύση

Προσεγγίζουμε τη συνάρτηση $f(x)$ με άλλη συνάρτηση (π.χ. πολυώνυμο, λόγο πολυωνύμων, τμηματική συνάρτηση με ευθύγραμμα τμήματα ή πολυώνυμα όχι ελάχιστου βαθμού (spline) κλπ.). Κατόπιν, παραγωγίζουμε τη νέα συνάρτηση.

Παράδειγμα

Το πολυώνυμο παρεμβολής με τον τύπο Lagrange είναι

$$p(x) = \sum_i f_i \, \ell_i(x) \ ,$$

όπου

$$\ell_i(x) = \prod_{j,\, j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \ ,$$

και το άθροισμα και το γινόμενο είναι πάνω σε όλα τα σημεία.
Επομένως, π.χ. η δεύτερη παράγωγος της $f(x)$ στο $\bar{x}$ είναι

$$f''(\bar{x}) \approx p''(\bar{x}) = \sum_i f_i \, \ell_i''(\bar{x}) \ .$$

Πολλές πράξεις!

Μπορώ να βρω αλλιώς (πιο γρήγορα) τους αριθμούς $\ell_i''(\bar{x})$;

Τύποι που παράγονται από τον ορισμό (1/3)

Ορισμός πρώτης παραγώγου

$$f'(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \; .$$

Εφαρμογή

Αν ξέρουμε ότι η f περνά από τα σημεία (x_i, f_i) με $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ τότε η παράγωγος στο x_0 είναι προσεγγιστικά

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\approx \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \; , \\ f'(x_0) &\approx \frac{f_{-1} - f_0}{x_{-1} - x_0} \; . \end{aligned}$$

Ανάπτυγμα Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots \; .$$

Εφαρμογή

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x_1 - x_0)^3 \cdots \Rightarrow \\ f'(x_0) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{x_1 - x_0}{2!} f''(x_0) - \frac{(x_1 - x_0)^2}{3!} f'''(x_0) - \cdots \; . \end{aligned}$$

Άρα

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + \mathcal{O}(x_1 - x_0) \; ,$$

και αντίστοιχα

$$f'(x_0) = \frac{f_{-1} - f_0}{x_{-1} - x_0} + \mathcal{O}(x_{-1} - x_0) \; .$$

Τύποι που παράγονται από τον ορισμό (3/3)

Έστω ότι x_{-1}, x_0, x_1 ισαπέχουν, δηλαδή έστω ότι $x_0 - x_{-1} = x_1 - x_0 = h$. Τα αναπτύγματα Taylor της f στα x_1, x_{-1} δίνουν για την $f'(x_0)$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2!} f''(x_0) - \frac{h^2}{3!} f'''(x_0) - \cdots\ , \\ f'(x_0) &= \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{h} + \frac{h}{2!} f''(x_0) - \frac{h^2}{3!} f'''(x_0) - \cdots\ . \end{aligned}$$

Το ημιάθροισμά τους δίνει

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_{-1})}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''(x_0) - \cdots = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2)\ .$$

Το σφάλμα είναι ανάλογο του h^2 παρόλο που χρησιμοποιούμε πάλι μόνο δύο τιμές της f.

Τύποι που παράγονται από τον ορισμό (3/3)

Έστω ότι x_{-1}, x_0, x_1 ισαπέχουν, δηλαδή έστω ότι $x_0 - x_{-1} = x_1 - x_0 = h$. Τα αναπτύγματα Taylor της f στα x_1, x_{-1} δίνουν για την $f'(x_0)$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2!} f''(x_0) - \frac{h^2}{3!} f'''(x_0) - \cdots \,, \\
f'(x_0) &= \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{h} + \frac{h}{2!} f''(x_0) - \frac{h^2}{3!} f'''(x_0) - \cdots \,.
\end{aligned}
$$

Το ημιάθροισμά τους δίνει

$$
f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_{-1})}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''(x_0) - \cdots = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \,.
$$

Το σφάλμα είναι ανάλογο του h^2 παρόλο που χρησιμοποιούμε πάλι μόνο δύο τιμές της f.

Παρατήρηση

Ο υπολογισμός της παραγώγου με τιμές σε σημεία που περικλείουν το σημείο υπολογισμού της είναι πιο ακριβής από τον υπολογισμό με τύπο που έχει το σημείο υπολογισμού σε άκρο του.

Η παράγωγος της $f(x)$ οποιασδήποτε τάξης m (ακόμα και μηδενικής), σε κάποιο σημείο $\bar{x}$ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός γνωστών τιμών της συνάρτησης σε σημεία x_i, με $i = 0, \ldots, n-1$ και $n > m$:

$$f^{(m)}(\bar{x}) \approx \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i) \ .$$

Οι άγνωστοι συντελεστές w_i εξαρτώνται από το $\bar{x}$ και τα x_i.

Προσεγγίζουμε με το ανάπτυγμα Taylor τις τιμές των $f(x_i)$ για $i = 0, \ldots, n-1$ στο $\bar{x}$:

$$f(x_i) = f(\bar{x}) + (x_i - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{2!}f''(\bar{x}) + \frac{(x_i - \bar{x})^3}{3!}f'''(\bar{x}) + \cdots .$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i) \quad = \quad & w_0 \left(f(\bar{x}) + (x_0 - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{2!}f''(\bar{x}) + \cdots \right) \\
& + w_1 \left(f(\bar{x}) + (x_1 - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x_1 - \bar{x})^2}{2!}f''(\bar{x}) + \cdots \right) \\
& + \cdots \\
& + w_{n-1} \left(f(\bar{x}) + (x_{n-1} - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x_{n-1} - \bar{x})^2}{2!}f''(\bar{x}) + \cdots \right) \\
= \quad & f(\bar{x})(w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1}) \\
& + f'(\bar{x})(w_0(x_0 - \bar{x}) + w_1(x_1 - \bar{x}) + \cdots + w_{n-1}(x_{n-1} - \bar{x})) \\
& + \frac{f''(\bar{x})}{2!} \left(w_0(x_0 - \bar{x})^2 + w_1(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + w_{n-1}(x_{n-1} - \bar{x})^2 \right) + \cdots
\end{aligned}$$

Βρήκαμε ότι

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i) \quad = \quad & f(\bar{x})(w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1}) \\
& + f'(\bar{x})(w_0(x_0 - \bar{x}) + w_1(x_1 - \bar{x}) + \cdots + w_{n-1}(x_{n-1} - \bar{x})) \\
& + \frac{f''(\bar{x})}{2!}\left(w_0(x_0 - \bar{x})^2 + w_1(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + w_{n-1}(x_{n-1} - \bar{x})^2\right) + \cdots
\end{aligned}
$$

Απαιτούμε να ισχύει *ακριβώς*

$$
f^{(m)}(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i) \ .
$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των παραγώγων στα δύο μέλη και ...

...καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{array}{rcl} w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1} & = & 0 \\ w_0(x_0 - \bar{x}) + w_1(x_1 - \bar{x}) + \cdots + w_{n-1}(x_{n-1} - \bar{x}) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ w_0(x_0 - \bar{x})^m + w_1(x_1 - \bar{x})^m + \cdots + w_{n-1}(x_{n-1} - \bar{x})^m & = & m! \\ \vdots & & \vdots \\ w_0(x_0 - \bar{x})^{n-1} + w_1(x_1 - \bar{x})^{n-1} + \cdots + w_{n-1}(x_{n-1} - \bar{x})^{n-1} & = & 0\,. \end{array}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα για τους άγνωστους συντελεστές w_i, με στοιχεία του πίνακα συντελεστών τα $A_{ij} = (x_j - \bar{x})^i$, με $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$, και σταθερούς όρους το διάνυσμα $b_i = m!\delta_{im}$ (με όλα τα στοιχεία δηλαδή 0 εκτός από το b_m που είναι $m!$).

Απαιτούμε η σχέση

$$f^{(m)}(\bar{x}) \approx \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i) \, .$$

να είναι *ακριβής* όταν η $f(x)$ είναι διαδοχικά οι συναρτήσεις $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = x^2$, ..., $g_{n-1}(x) = x^{n-1}$. Παράγεται έτσι ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων με άγνωστους τους συντελεστές w_i, το οποίο έχει μοναδική λύση:

$$\begin{bmatrix} (1)^{(m)} \\ (\bar{x})^{(m)} \\ (\bar{x}^2)^{(m)} \\ \vdots \\ (\bar{x}^{n-1})^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} \, .$$

Υπάρχει γρήγορος αλγόριθμος (Fornberg) για τη λύση του.

Πρώτη παράγωγος της f στο $\bar{x}$ από τις τιμές στα σημεία $x_0 - h, x_0, x_0 + h$:

$$f'(\bar{x}) \approx af(x_0 - h) + bf(x_0) + cf(x_0 + h) \ .$$

Όταν η $f(x)$ είναι διαδοχικά 1, x, x^2 έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 \quad &\Rightarrow \quad 0 = a + b + c \ , \\
f(x) = x \quad &\Rightarrow \quad 1 = a(x_0 - h) + bx_0 + c(x_0 + h) \ , \\
f(x) = x^2 \quad &\Rightarrow \quad 2\bar{x} = a(x_0 - h)^2 + bx_0^2 + c(x_0 + h)^2 \ .
\end{aligned}$$

Η λύση του γραμμικού συστήματος δίνει

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{1}{2h} + \frac{\bar{x} - x_0}{h^2} \ , \\
b &= -2\frac{\bar{x} - x_0}{h^2} \ , \\
c &= \frac{1}{2h} + \frac{\bar{x} - x_0}{h^2} \ .
\end{aligned}$$

Αν $\bar{x} \equiv x_0$ έχουμε $a = -1/2h$, $b = 0$, $c = 1/2h$, δηλαδή

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \ .$$

Αν $\bar{x} \equiv x_0 + h$ έχουμε $a = 1/2h$, $b = -2/h$, $c = 3/2h$. Επομένως

$$f'(x_0+h) \approx \frac{f(x_0-h) - 4f(x_0) + 3f(x_0+h)}{2h} \ .$$

Πρόβλημα

Πώς θα προσεγγίσουμε συνάρτηση $f(x)$ για την οποία έχουμε ένα σύνολο σημείων (x_i, y_i) με $i = 1, \ldots, n$ αλλά $y_i \approx f(x_i)$ (και όχι $y_i = f(x_i)$);

Παράδειγμα: πειραματικές μετρήσεις, με σφάλματα δηλαδή, για τις τιμές $f(x_i)$.

Δεν έχει νόημα να την προσεγγίσουμε με συνάρτηση $p(x)$ που περνά από τα (x_i, y_i).

Προσέγγιση με Ελάχιστα Τετράγωνα (1/3)

Πρόβλημα

Πώς θα προσεγγίσουμε συνάρτηση $f(x)$ για την οποία έχουμε ένα σύνολο σημείων (x_i, y_i) με $i = 1, \ldots, n$ αλλά $y_i \approx f(x_i)$ (και όχι $y_i = f(x_i)$);

Παράδειγμα: πειραματικές μετρήσεις, με σφάλματα δηλαδή, για τις τιμές $f(x_i)$.

Δεν έχει νόημα να την προσεγγίσουμε με συνάρτηση $p(x)$ που περνά από τα (x_i, y_i).

Πρόβλημα

Πώς θα απλοποιήσουμε πολύπλοκη συνάρτηση $f(x)$, γνωστή σε κάποια σημεία, χρησιμοποιώντας απλούστερη συνάρτηση $p(x)$ με λιγότερες ελεύθερες παραμέτρους απ' ό,τι σημεία;

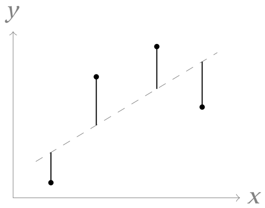
Το (γενικά μη γραμμικό) σύστημα $p(x_i) = f(x_i)$ έχει περισσότερες εξισώσεις απ' ό,τι αγνώστους. Να απορρίψω σημεία;

Λύση

Με τη *μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων* προσαρμόζουμε στα δεδομένα μας μια συνάρτηση $g(x)$ προκαθορισμένης μορφής, με παραμέτρους, ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από τα y_i,

$$\sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - y_i)^2 \ ,$$

να γίνεται ελάχιστο ως προς αυτές τις παραμέτρους.



Προσέγγιση με Ελάχιστα Τετράγωνα (3/3)

Παρατήρηση

Επιλέγουμε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των τετραγώνων αντί για τις απόλυτες τιμές των αποκλίσεων καθώς θέλουμε να σχηματίσουμε μια συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση: προσέξτε ότι π.χ. η παράγωγος του $|x|$ δεν ορίζεται στο 0, ενώ, αντίθετα, η x^2 έχει παραγώγους σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Ευθεία ελάχιστων τετραγώνων (1/4)

Έστω ότι γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι η συνάρτηση $f(x)$ που έδωσε τις μετρήσεις (x_i, y_i) είναι γραμμική.
Σχηματίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = \alpha x + \beta$ με άγνωστους συντελεστές α, β. Αυτοί θα προκύψουν από την απαίτηση να ελαχιστοποιείται το άθροισμα

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta - y_i)^2 \ .$$

Η συνάρτηση $E(\alpha, \beta)$ γίνεται ακρότατη όταν $\partial E/\partial\alpha = 0$, $\partial E/\partial\beta = 0$. Οι εξισώσεις γίνονται

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta - y_i)x_i = 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \beta\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
2\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta - y_i) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i
\end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$\alpha = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^{\,2}} \ ,$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \overline{y} - \alpha\overline{x} \ ,$$

όπου

$$\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i \ ,$$

η μέση τιμή ενός μεγέθους w.
Ο παρονομαστής στα κλάσματα δείχνεται εύκολα ότι είναι θετικός.

Ευθεία ελάχιστων τετραγώνων (3/4)

Το ακρότατο της $E(\alpha, \beta)$ στις παραπάνω τιμές των α, β είναι ελάχιστο καθώς ο εσσιανός πίνακας

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2} & \dfrac{\partial^2 E}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \dfrac{\partial^2 E}{\partial \beta \partial \alpha} & \dfrac{\partial^2 E}{\partial \beta^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}$$

είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος (δείτε τις σημειώσεις για την απόδειξη).

Συντελεστής συσχέτισης

Ο συντελεστής συσχέτισης, r^2, που προσδιορίζει την ποιότητα της προσέγγισης, είναι

$$r^2 \equiv \frac{\left(n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2}{\left(n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right) \left(n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2 \right)} = \alpha^2 \frac{\overline{x^2} - \overline{x}^2}{\overline{y^2} - \overline{y}^2} \,.$$

Ισχύει πάντα ότι $0 \leq r^2 \leq 1$. Το $r^2 = 1$ υποδηλώνει τέλεια προσαρμογή (η ευθεία περνά από όλα τα σημεία), ενώ η τιμή γίνεται τόσο μικρότερη από 1 όσο πιο διασκορπισμένα είναι τα σημεία γύρω από την ευθεία.

Πολυώνυμο ελάχιστων τετραγώνων (1/3)

Έστω ότι γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι η συνάρτηση $f(x)$ που έδωσε τις μετρήσεις (x_i, y_i) είναι πολυωνυμική βαθμού m ως προς x.
Σχηματίζουμε τη συνάρτηση

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i$$

με άγνωστους συντελεστές τα α_i. Αυτοί θα προκύψουν από την απαίτηση να ελαχιστοποιείται το άθροισμα

$$E(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^{n} (p(x_i) - y_i)^2 \ ,$$

δηλαδή,

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_k} = 0 \text{ , για } k = 0, 1, \ldots, m \ .$$

Πολυώνυμο ελάχιστων τετραγώνων (2/3)

Οι εξισώσεις γίνονται

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_k} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^k \left(\sum_{j=0}^{m} \alpha_j x_i^j - y_i \right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+j} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k y_i \ .$$

Στο γραμμικό σύστημα για τα α_j, ο πίνακας των συντελεστών A, με διαστάσεις $(m+1) \times (m+1)$, έχει στοιχεία

$$A_{kj} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{k+j} \qquad \text{με } k = 0, 1, \ldots, m \ , \quad j = 0, 1, \ldots, m \ .$$

Οι σταθεροί όροι είναι

$$b_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k y_i \ .$$

Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση αν $m < n$. Αν $n = m + 1$, η λύση αντιστοιχεί στο πολυώνυμο παρεμβολής m βαθμού.

Έστω ότι τα σημεία (x_i, y_i) είναι $\{(0.0, 1.0), (0.25, 1.284), (0.5, 1.6487), (0.75, 2.117), (1.0, 2.7183)\}$, $i = 1, \ldots, 5$. Το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο που εξάγεται από τη μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων προκύπτει ως λύση της

$$\begin{bmatrix} 5.0 & 2.5 & 1.8750 \\ 2.5 & 1.875 & 1.5625 \\ 1.875 & 1.5625 & 1.3828 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.768 \\ 5.4514 \\ 4.4015 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 1.0052 \\ \alpha_1 = 0.8641 \\ \alpha_2 = 0.8437 \end{cases} .$$

Επομένως,

$$p(x) = 1.0052 + 0.8641x + 0.8437x^2.$$

Η ευθεία ελάχιστων τετραγώνων είναι η $p(x) = 0.89968 + 1.70784x$. Όπως παρατηρούμε, οι συντελεστές της δεν έχουν σχέση με τους δυο πρώτους συντελεστές του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου.

Καμπύλη ελάχιστων τετραγώνων $h(y) = \alpha g(x) + \beta$ (1/2)

Πρόβλημα

Έστω ότι έχουμε πειραματικά σημεία με θεωρητική σχέση της μορφής $h(y) = \alpha g(x) + \beta$, όπου $h(y)$ και $g(x)$ κάποιες συναρτήσεις. Ποια είναι η καμπύλη ελάχιστων τετραγώνων;

Πρόβλημα

Έστω ότι έχουμε πειραματικά σημεία με θεωρητική σχέση της μορφής $h(y) = \alpha g(x) + \beta$, όπου $h(y)$ και $g(x)$ κάποιες συναρτήσεις. Ποια είναι η καμπύλη ελάχιστων τετραγώνων;

Λύση

Ορίζουμε τα σημεία $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ με $\tilde{x}_i = g(x_i)$ και $\tilde{y}_i = h(y_i)$, και εφαρμόζουμε για αυτά τις σχέσεις για τα α, β της ευθείας ελάχιστων τετραγώνων καθώς η σχέση των $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ είναι γραμμική.

- Έστω ότι η θεωρητική σχέση είναι $y = a + be^x$. Ορίζουμε

$$\tilde{y} = y \,, \qquad \tilde{x} = \mathrm{e}^x \,, \qquad \tilde{\alpha} = b \,, \qquad \tilde{\beta} = a \,.$$

Η εξίσωση γίνεται $\tilde{y} = \tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\tilde{x}$. Η εφαρμογή των τύπων για τα α, β της ευθείας ελάχιστων τετραγώνων υπολογίζει τα $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ άρα και τα a, b.

- Έστω ότι η θεωρητική σχέση είναι $y = a + be^x$. Ορίζουμε

$$\tilde{y} = y\,, \qquad \tilde{x} = \mathrm{e}^x\,, \qquad \tilde{\alpha} = b\,, \qquad \tilde{\beta} = a\,.$$

  Η εξίσωση γίνεται $\tilde{y} = \tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\tilde{x}$. Η εφαρμογή των τύπων για τα α, β της ευθείας ελάχιστων τετραγώνων υπολογίζει τα $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ άρα και τα a, b.

- Έστω ότι η θεωρητική σχέση είναι $y = ax^b$. Η εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή $\ln y = \ln a + b \ln x$. Ορίζουμε

$$\tilde{y} = \ln y\,, \qquad \tilde{x} = \ln x\,, \qquad \tilde{\alpha} = b\,, \qquad \tilde{\beta} = \ln a\,.$$

  Η εξίσωση γίνεται $\tilde{y} = \tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\tilde{x}$. Η εφαρμογή των τύπων για τα α, β της ευθείας ελάχιστων τετραγώνων υπολογίζει τα $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ άρα και τα a, b.