1 Πρόβλημα

Για τη διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με αρχική τιμή:

$$y' = f(x, y) , \qquad y(a) = y_0 ,$$

θέλουμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά το $y(b)$.

2 Μέθοδοι

Επιλέγουμε $n+1$ ισαπέχοντα σημεία στο $[a, b]$, $x_i = a + ih$ με $i = 0, 1, \ldots, n$ και $h = (b - a)/n$. Κατόπιν, εφαρμόζουμε διαδοχικά στα διαστήματα $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ κλπ. έως φτάσουμε στο $x_n \equiv b$, μία από τις ακόλουθες μεθόδους.

Προσέξτε στις implicit μεθόδους να επιλύετε αριθμητικά ως προς y_{i+1}.

2.1 explicit Taylor

$$\begin{aligned} y_{i+1} &\approx y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \left.(f_x + f_y f)\right|_{x_i} \\ &+ \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} \left.(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}(f)^2 + f_y(f_x + f_y f))\right|_{x_i} + \cdots . \end{aligned}$$

2.2 implicit Taylor

$$\begin{aligned} y_{i+1} &\approx y_i + f(x_{i+1}, y_{i+1})(x_{i+1} - x_i) - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \left.(f_x + f_y f)\right|_{x_{i+1}} \\ &+ \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} \left.(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}(f)^2 + f_y(f_x + f_y f))\right|_{x_{i+1}} + \cdots . \end{aligned}$$

2.3 Forward Euler

$$y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i) f(x_i, y_i) + \mathcal{O}((x_{i+1} - x_i)^2) .$$

2.4 Backward Euler

$$y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}, y_{i+1}) + \mathcal{O}((x_{i+1} - x_i)^2) .$$

2.5 Crank–Nicolson

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right) .$$

2.6 Runge–Kutta 2ης τάξης

Η κλασική explicit μέθοδος Runge–Kutta δεύτερης τάξης ή μέθοδος Heun, έχει εξισώσεις

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\ , \\ k_1 &= hf(x_i, y_i)\ , \\ k_2 &= hf(x_i + h, y_i + k_1)\ . \end{aligned}$$

Η μέθοδος Ralston έχει εξισώσεις:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2)\ , \\ k_1 &= hf(x_i, y_i)\ , \\ k_2 &= hf(x_i + 2h/3, y_i + 2k_1/3) \end{aligned}$$

2.7 Runge–Kutta 4ης τάξης

Η κλασική explicit μέθοδος Runge–Kutta τέταρτης τάξης (RK4) έχει εξισώσεις

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\ , \\ k_1 &= hf(x_i, y_i)\ , \\ k_2 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)\ , \\ k_3 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2)\ , \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3)\ . \end{aligned}$$

Η Runge–Kutta $^3/_8$ είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)\ , \\ k_1 &= hf(x_i, y_i)\ , \\ k_2 &= hf(x_i + h/3, y_i + k_1/3)\ , \\ k_3 &= hf(x_i + 2h/3, y_i - k_1/3 + k_2)\ , \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_1 - k_2 + k_3)\ . \end{aligned}$$