Αριθμητική Ανάλυση

Ασκήσεις Εργαστηρίου 10

1. Εφαρμόστε τη μέθοδο forward Euler για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = \cos x - x \sin x$$

   στο διάστημα $[0, 3]$, με $y(0) = 2.0$. Τυπώστε τη λύση ανά $h = 0.01$. Συγκρίνετε με την ακριβή λύση, $y(x) = 2 + x \cos x$.

2. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο backward Euler για να βρείτε προσεγγιστικά την τιμή της συνάρτησης $y(x)$ στο σημείο $x = 0.2$ αν στο $x = 0$ έχει τιμή 1.0 και ικανοποιεί τη σχέση $0.02y' + y - \cos x = 0$. Συγκρίνετε με τη σωστή λύση $y(x) = (\mathrm{e}^{-50x} + 2500 \cos(x) + 50 \sin(x))/2501$.

3. Εφαρμόστε τις μεθόδους forward και backward Euler για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = \cos x - \sin y + x^2$$

   στο διάστημα $[-1, 1]$, με $y(-1) = 3.0$. Τυπώστε τη λύση ανά $h = 0.01$.

4. Εφαρμόστε τη μέθοδο Taylor με 5 όρους για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης της προηγούμενης άσκησης.

5. Να βρείτε την τιμή $y(0.6)$ αν η $y(x)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $y' = x^2 + x - y$ με $y(0) = 0$. Χρησιμοποιήστε τις μεθόδους Heun και Ralston. Συγκρίνετε με την τιμή που υπολογίζεται από τη λύση $y(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} + x^2 - x$.

6. Γράψτε συνάρτηση που να δέχεται ένα Butcher tableau (δηλαδή τους πίνακες $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$) κάποιας explicit μεθόδου Runge–Kutta, το αρχικό σημείο x_0, την τιμή της συνάρτησης y_0 εκεί και το τελικό σημείο x_1 και να υπολογίζει την τιμή y_1 εφαρμόζοντας τη μέθοδο Runge–Kutta που περιγράφεται στο συγκεκριμένο tableau.

   Χρησιμοποιήστε τη για να εφαρμόσετε την κλασική Runge–Kutta τέταρτης τάξης ώστε να βρείτε την τιμή $y(2)$ όταν η συνάρτηση $y(x)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} y' &= (y + x)/(y - x) \;, \\ y(0) &= 1 \;. \end{aligned}$$

   Συγκρίνετε με την ακριβή λύση, $y(x) = x + \sqrt{1 + 2x^2}$.

   Μπορείτε να τροποποιήσετε τον κώδικά σας για implicit Runge–Kutta;

7. Η συνάρτηση $y(x)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{x-2y}{x+2y} \; .$$

Ποια τιμή πρέπει να έχει στο $x=0$ ώστε στο $x=2$ να έχει την ίδια τιμή;

Υπόδειξη: Σχηματίστε τη συνάρτηση $g(y_{\text{αρχικό}})$. Αυτή θα δέχεται την αρχική τιμή του y, θα λύνει τη διαφορική εξίσωση ώστε να βρεί το $y_{\text{τελικό}}$ και θα επιστρέφει τη διαφορά $y_{\text{τελικό}} - y_{\text{αρχικό}}$. Κατόπιν, βρείτε για ποιο $y_{\text{αρχικό}}$ μηδενίζεται.

8. Εφαρμόστε τη μέθοδο Taylor με 4 όρους για την επίλυση του συστήματος ΔΕ

$$\begin{aligned} y' &= y + z^2 - x^3 \\ z' &= z + y^3 + \cos x \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες, στο $x=0$, $y=0.3$ και $z=0.1$. Τυπώστε τις τιμές των y, z στο διάστημα $[0,1]$ με βήμα 0.01.

9. Να εφαρμόσετε μια μέθοδο Runge–Kutta $2^{\text{ης}}$ τάξης για την εύρεση της κίνησης σώματος μάζας $m = 2\,\text{kg}$, εξαρτώμενου από ελατήριο με δύναμη επαναφοράς $F(x) = x - 0.01x^3$. Το σώμα αφήνεται για $t=0$ ελεύθερο, χωρίς αρχική ταχύτητα, στη θέση $x = 2.5\,\text{cm}$.

10. Να βρείτε την κίνηση εκκρεμούς για το οποίο ισχύει

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta \; ,$$

όπου θ η γωνία απομάκρυνσης από την κάθετο. Το εκκρεμές αφήνεται ελεύθερο, χωρίς αρχική ταχύτητα σε γωνία $\theta = 45°$.

Για μικρές γωνίες θ ισχύει $\sin\theta \approx \theta$. Εφαρμόστε την προσέγγιση αυτή και συγκρίνετε τη λύση της νέας ΔΕ με τη λύση της ακριβούς ΔΕ.

11. Να λύσετε τη ΔΕ $\psi'' = (x^2 - 5)\psi$ με αρχική συνθήκη $\psi(0) = -(2\sqrt{\pi})^{-1/2}$, $\psi'(0) = 0$. Τυπώστε 100 ισαπέχουσες τιμές στο διάστημα $[-2, 2]$.

Υπόδειξη Να λύσετε δύο προβλήματα αρχικών τιμών, τη ΔΕ στα διαστήματα $[0,2]$ και $[-2,0]$.